ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΞΙΣΩΣΗ

$\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$

Έχουμε, $\alpha z^2+\beta z+\gamma = \alpha\left(z^2+\frac{\beta}{\alpha}z+\frac{\gamma}{\alpha}\right) = \alpha\left[\left(z^2+\frac{\beta}{\alpha}z+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{\gamma}{\alpha}\right]$

$$= \alpha\left[\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right]=0 \Rightarrow \left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \Rightarrow$$

$\Leftrightarrow z+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4a\gamma}}{2a} \Rightarrow z_j=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4a\gamma}}{2a}, \quad j=1,2$

ΤΡΙΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΞΙΣΩΣΗ: (Cardano)

$z^3+az^2+\beta z+\gamma=0$

Θέλω να διώξω τον όρο az^2

Θέτω $z=w-\frac{a}{3}$

Άρα, μετασχηματίζαμε την εξίσωση σε μια νέα μορφή:

$w^3+Aw+B=0$

Έπειτα θέτω $w=J-\frac{A}{3J}$ τότε παίρνουμε την εξίσωση

$J^3-\frac{A^3}{27J^3}+B=0$

Τέλος, θέτω $n=J^3$ και παίρνουμε:

$n^2+Bn-\frac{A^3}{27}=0 \xRightarrow[n_1,n_2]{\text{ρίζες}} n_1, n_2=J^3 \Rightarrow J_1, J_2, J_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow w_1, w_2, w_3 \Rightarrow z_1, z_2, z_3$.

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΛΥΣΕΩΝ ΤΩΝ ΔΥΟ ΑΥΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ:

- Έστω πολυώνυμο $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=$
  $=(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_n)$ αλλά δεν είναι απαραίτητα να γράφεται ως γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων. Διότι εάν θεωρήσαμε το πολυώνυμο β' βαθμού με ρίζες τις $x=a$ και $x=\bar{a}$ τότε
  $(x-a)\cdot(x-\bar{a})=x^2-x\bar{a}-xa+a\bar{a}=x^2-x(a+\bar{a})+|a|^2$
  δηλ. γράφεται στη μορφή x^2+Ax+B, $x\in R$

- Έστω πολυώνυμο μιγαδικών $P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_n=$
  $=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$.

Επίσης, εάν έχουμε την ποσότητα

$$\frac{1}{x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n}=\frac{k_1}{x-\rho_1}+\frac{k_2}{(x-\rho_2)^2}+\dots+\frac{k_1}{(x-\rho_1)^{\lambda}}+\dots+\frac{a_1x+b_1}{x^2+Ax+B_1}+$$

Παράδειγμα:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-i} = \frac{(A+B)z + i(B-A)}{z^2+1} \Rightarrow$$

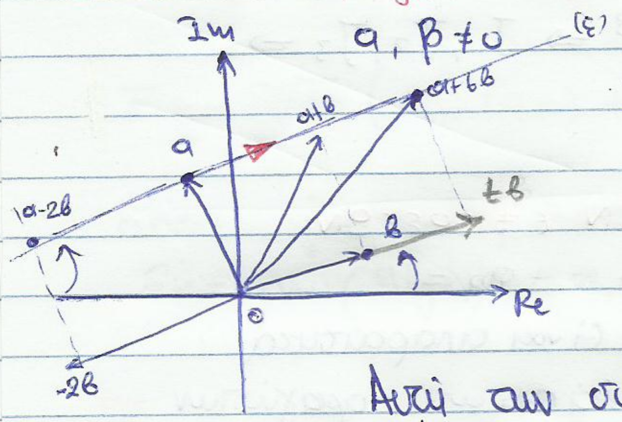
$A+B=1$ και $i(B-A)=1$

$B=-A$ και $i(-A-A)=1 \Rightarrow -2iA=1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}$

και $B = -\frac{i}{2}$

Άρα $\frac{1}{z^2+1} = \frac{i/2}{(z+i)} - \frac{i/2}{(z-i)}$

Ευθεία στο μιγαδικό επίπεδο



$a+tb$

Παρατηρούμε ότι η ευθεία (ε) καθορίζεται από το a και από την κλίση της δηλ. το όρισμα του b.

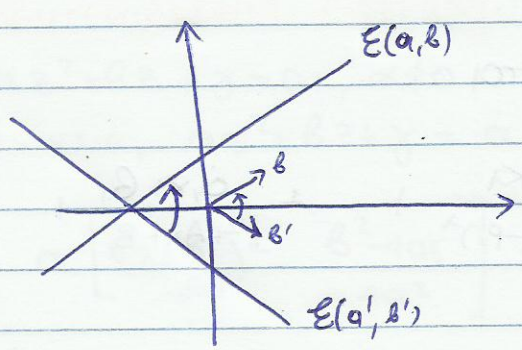
Αυτή την συμβολίζουμε ως

$\varepsilon = \varepsilon(a,b) = \{z = a+tb,\ t \in \mathbb{R}\}$

Έτσι, εάν $z \in \varepsilon(a,b) \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R}: z = a+tb = a + \underbrace{t|b|}_{\in \mathbb{R}} \frac{b}{|b|}$

Ευθεία στο μιγαδικό επίπεδο δεν είναι σύνολο σημείων απλά, άλλα είναι ένας δρόμος ή μία προσανατολισμένη γραμμή

Τεμνόμενες ευθείες στο μιγαδικό επίπεδο



$\measuredangle(\varepsilon(a',b'), \varepsilon(a,b)) = \arg(b) - \arg(a)$

Παραμετρηση ευθείας στο $\mathbb{C}$:

Έστω $z=a+tb$, $t\in[0,1]$

$z(0)=a=:A$

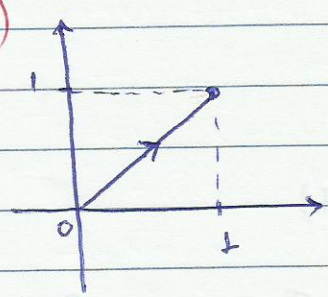
$z(1)=a+\beta=:B \Rightarrow \beta=B-A$

$z(t)=A+t(B-A)=(1-t)\cdot A+tB$, $t\in[0,1]$

Δηλ. το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα A και B δίνεται με παραμετρικό τρόπο

Εφαρμογή:

1)



$y=x$, $x\in[0,1]$

$z=x+iy=x+ix \overset{x\in[0,1]}{=} x(1+i)=t(1+i)$, $t\in[0,1]$

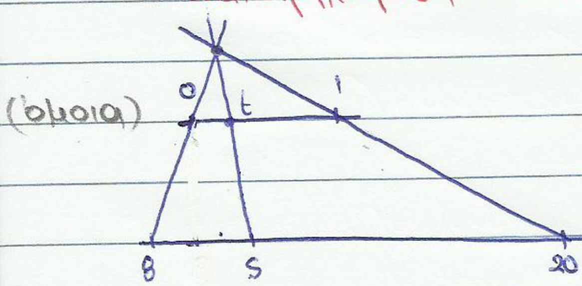
2) Έστω μιγαδικοί $v=-1$ και $w=2+i$

το ευθύγραμμο τμήμα που τους ενώνει

είναι $z(t)=(1-t)(-1)+t(2+i)=-1+t+2t+it=x+iy$

Έτσι, $x=-1+3t$ και $y=t \Rightarrow \boxed{3y-x=1}$

Αναπαραμέτρηση ευθείας:



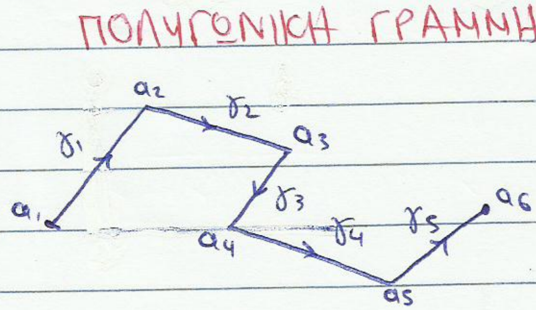
$\frac{t-0}{s-8}=\frac{1}{20-8}\Rightarrow t=\frac{1}{12}(s-8)=$

Έτσι, ο $z(t)=(1-t)A+tB$, $t\in[0,1]$

Μετασχηματίζεται σε ισοδύναμη μορφή

$z(t)=z\left(\frac{1}{12}(s-8)\right)$

ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

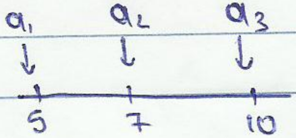


$\mathcal{E}=\mathcal{E}(a,b)=\{z=a+t\beta,\ t\in\mathbb{R}\}$

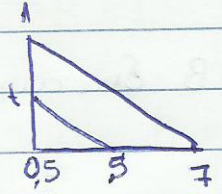
$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5$ το διάστημα

$\gamma_1:\ z_1(t)=(1-t)a_1+ta_2$, $t\in[0,1]$

$\gamma_2:\ z_2(t)=(1-t)a_2+ta_3$, $t\in[0,1]$



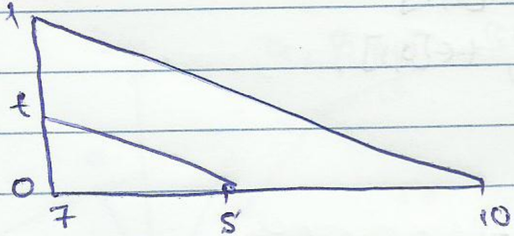
ευθεία χρόνου (t)



$$\frac{t-0}{1-0} = \frac{s-5}{7-5} \Rightarrow t = \frac{1}{2}(s-5)$$

Έτσι, $z(s) = (1-\frac{1}{2}(s-5)a_1 + \frac{1}{2}(s-5)a_2$, $s\in[5,7]$

Για το διάστημα [7,10]



$$\frac{t}{1} = \frac{s-7}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{3}(s-7)$$

$$Z(z) = (1-\frac{1}{3}(s-7)a_2 + \frac{1}{3}(s-7)a_3, \ s\in[7,10]$$

όμοια και για τα υπόλοιπα.